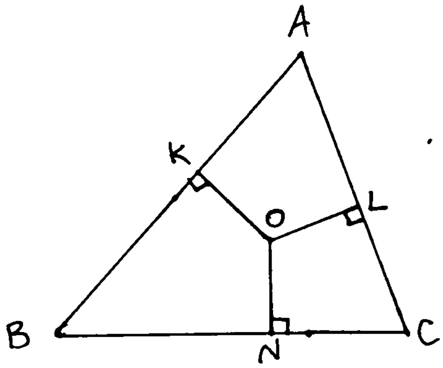
בס״ד

פתרון שאלה 1 בבחינת מחצית א׳ 5.8.16



א 1) נתון: ΔABC

צ"ל: קיים מעגל המשיק לכל צלעותיו.

הוכחה: נסמן ב-O את מפגש חוצי זווית המשולש (שלושת חוצי הזווית עוברים בנקודה אחת). נעביר OK, OL, ON אנכים לצלעות.

$OK=OL$ (נק' על חוצה $\measuredangle A$ מרחקיה משוקי הזווית שווים)

$OL=ON$ (O על חוצה $\measuredangle C$)

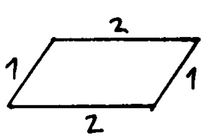
$\Leftarrow OK=OL=ON=r$.

נעביר מעגל שמרכזו O ורדיוס r.

מעגל זה משיק לכל הצלעות (כל צלע מאונכת לרדיוס בקצהו ולכן משיקה למעגל) ולכן חסום במשולש ■

א 2) במרובע ניתן לחסום מעגל אם ורק אם סכום צלעותיו הנגדיות שווה לסכום הצלעות הנגדיות האחרות.

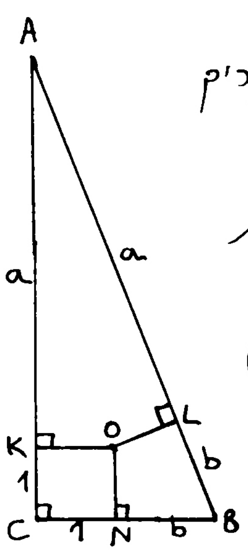
לכן הטענה אינה נכונה.



דוגמא נגדית: במקבילית שצלעותיה 1,2,1,2 מתקיים $1+1\neq 2+2$ ולכן לא ניתן לחסום בה מעגל ■

ב) AB קוטר המעגל החוסם (זווית היקפית ישרה נשענת על קוטר)

$\Leftarrow AB=10$.



נעביר $OK=OL=ON=1$ רדיוסים של המעגל החסום המאונכים לצלעות בנקודות ההשקה.

OKCN ריבוע (3 זוויות ישרות ⇐ מלבן + 2 צלעות סמוכות שוות ⇐ כל הצלעות שוות ⇐ ריבוע)

$\Leftarrow KC=CN=1$

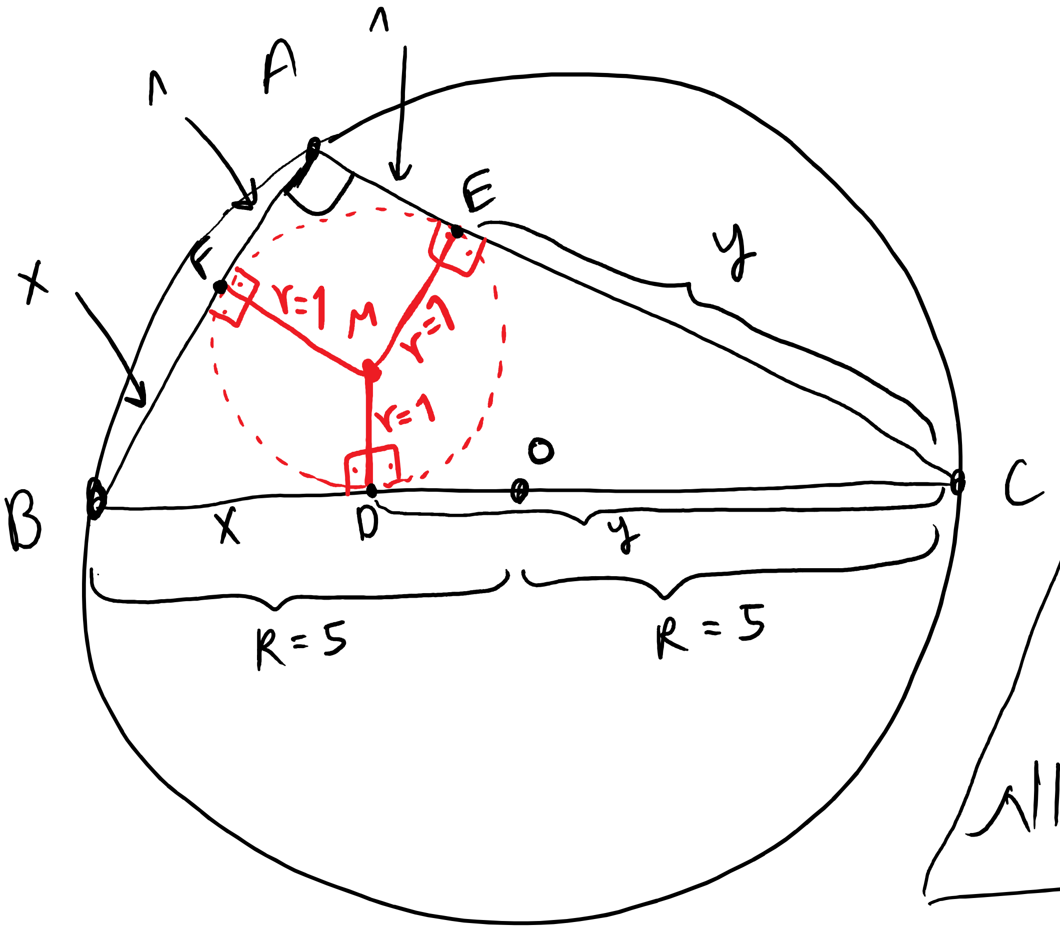
$a=AK=AL,\ b=BL=BN$ (משיקים למעגל מנק' חיצונית שווים)

$\Leftarrow a+b=AB=10$

$$p=\frac{AC+BC+AB}{2}=\frac{a+1+b+1+10}{2}=\frac{22}{2}=11$$

$$\boxed{S=pr=11\cdot 1=11}$$

ק



זווית ישרה נשענת על קוטר.
ולכן היתר משמשת כקוטר במעגל.

AFME → ריבוע
כל הזוויות ישרות +
שתי צלעות סמוכות שוות

$AF = AE = 1$
$FB = BD = x$
$EC = CD = y$

(משיקים מאותה נקודה שווים זה לזה) $\Rightarrow \boxed{x+y=10}$

$P = 1+1+x+x+y+y = 2+20 = 22 \Rightarrow p^* = \frac{P}{2} = 11$

היקף המשולש

$S = p^* \cdot r = \frac{22}{2} \cdot 1 = \boxed{11}$

סוף

② $y = \left| -x^2 + 2|x-1| + 1 \right|$

$y = -x^2 + 2|x-1| + 1$

$x \leq 1$ (1,0) $x > 1$

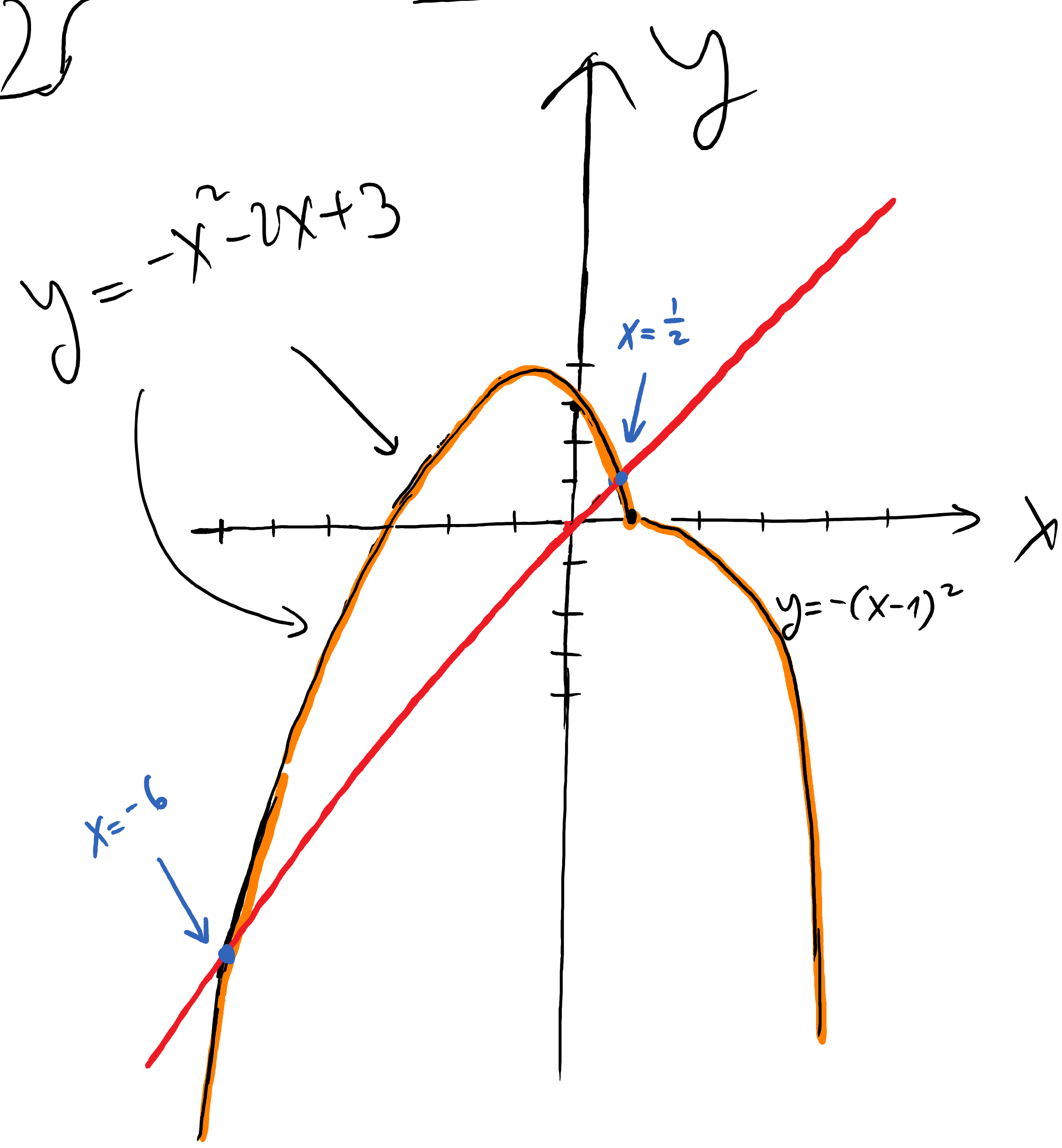
$7x - 2y = 0$

$y = \frac{7x}{2}$

(0,0)

(1, 3.5)

$x \leq 1$	$x > 1$
$y = -x^2 - 2(x-1) + 1$	$y = -x^2 + 2(x-1) + 1$
$y = -x^2 - 2x + 3$	$y = -x^2 + 2x - 1$
$y = -(x^2 + 2x - 3)$	$y = -(x^2 - 2x + 1)$
$y = -(x+3)(x-1)$	$y = -(x-1)^2$
(-1, 4)	



השוואה:

$$\frac{7}{2}x = -x^2 - 2x + 3$$

$$7x = -2x^2 - 4x + 6$$

$$2x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$2x^2 + 12x - x - 6 = 0$$

$$2x(x+6) - 1(x+6) = 0$$

$$(x+6)(2x-1) = 0$$

$$\boxed{x = -6} \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

ישר > פרבולה

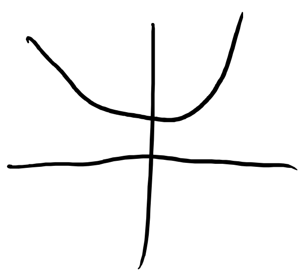
$\Downarrow$

$$\boxed{x < -6 \text{ או } x > \frac{1}{2}}$$

3) $y=\log_5(4x^2+4)-\log_5(4mx^2-x+4m)+1$

א) $4x^2+4>0$ לכל x

$4mx^2-x+4m>0$ לכל x



$a>0 \Rightarrow 4m>0 \Rightarrow \boxed{m>0}$

$\Delta<0 \Rightarrow 1-4\cdot 4m\cdot 4m<0$

$1-64m^2<0$

$(1-8m)(1+8m)<0$

$-\quad +\quad -$; $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$

$m>\frac{1}{8}$

$m<-\frac{1}{8}$

$m>\frac{1}{8}$ סופי.

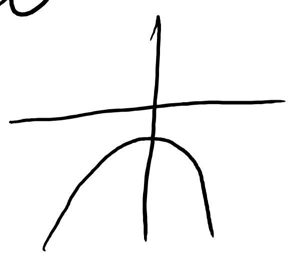
ב) $F(x)>0 \Rightarrow \log_5(\quad)-\log_5(\quad)+\log_5 5>0$

$\log_5\left(\frac{5(4x^2+4)}{4mx^2-x+4m}\right)>\log_5 1$

$\frac{5(4x^2+4)}{\underbrace{4mx^2-x+4m}_{}}>1 \Rightarrow 20x^2+20>4mx^2-x+4m$

בטוח חיובי בתחום מסעיף א'

$0>x^2(4m-20)-x+4m-20$



$4m-20<0$

$4m<20$

$\boxed{m<5}$

$\Delta<0$

$1-4(4m-20)^2<0$

$(1-2(4m-20))(1+2(4m-20))<0$

$(1-8m+40)(1+8m-40)<0$

$(41-8m)(8m-39)<0$

$-\quad +\quad -$; $\frac{39}{8}$, $\frac{41}{8}$

$m>\frac{41}{8}$

$m<\frac{39}{8}$

$\frac{1}{8}<m<\frac{39}{8}$

סופי.

(ג) $a_1 \; a_2 \; a_3$ חשבונית $d \neq 0$

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = d, \quad 2 \cdot a_2 = a_1 + a_3$

$u_1 = a_1 \cdot a_2 \qquad u_2 = a_2 \cdot a_3 \qquad u_3 = a_1 \cdot a_3$

$\frac{\cancel{a_2} a_3}{a_1 \cancel{a_2}} = q \qquad \frac{a_1 \cancel{a_3}}{a_2 \cancel{a_3}} = q$

$\frac{a_3}{a_1} = q \qquad \frac{a_1}{a_2} = q$

$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$

$a_3 \cdot a_2 = a_1^2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{a_3}$

$\frac{2 \cdot a_1^2}{a_3} = a_1 + a_3$

$2a_1^2 = a_1 a_3 + a_3^2$

$a_3^2 + a_1 a_3 - 2a_1^2 = 0$

$0 = (a_3 + 2a_1)(a_3 - a_1)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$a_3 = -2a_1 \quad | \quad a_3 = a_1$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\frac{a_3}{a_1} = -2 \quad | \quad \frac{a_3}{a_1} = 1$

$q = -2$ או $q = 1$ מבוטל

בדיקה:

$a_3 = -2a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{-2a_1} = -\frac{a_1}{2}$

$a_1, -\frac{1}{2}a_1, -2a_1 \quad \Rightarrow d = -1.5a_1$

$a_3 = a_1 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1^2}{a_1} = a_1$

$a_1, a_1, a_1 \quad \Rightarrow d = 0$ לא מתאים

(ד) $a_1 = 2 \Rightarrow u_1 = a_1 \cdot a_2 = a_1 \cdot (-\frac{1}{2}a_1) = -\frac{1}{2}a_1^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 = -2$

$q = -2$

$S = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{-2((-2)^7 - 1)}{-2 - 1} =$

$\frac{(-2)^8 + 2}{-3} = \frac{256 + 2}{-3} = -\frac{258}{3} = \boxed{-86}$

5 א

$$1+8+15+\dots+\left[(-1)^n\cdot n+2\cdot 3^{n-1}\right]=3^n+\frac{1}{2}(n-2)$$

$(-1)^1\cdot 1+2\cdot 3^0$

$(-1)^2\cdot 2+2\cdot 3^1$

$(-1)^3\cdot 3+2\cdot 3^2$

הוכחה באינדוקציה

בדיקה

$n=2$	L.H	R.H
	$1+8$ 9	$3^2+\frac{1}{2}(2-2)=9$ ✓

נניח: כי הטענה נכונה עבור n טבעי זוגי כלשהו.

נוכיח: כי הטענה נכונה עבור האיבר הבא עבור $n+2$.

$$\underbrace{1+8+15+\dots+\left[(-1)^n\cdot n+2\cdot 3^{n-1}\right]}_{\text{לפי ההנחה.}}+\left[(-1)^{n+1}\cdot(n+1)+2\cdot 3^n\right]+\left[(-1)^{n+2}\cdot(n+2)+2\cdot 3^{n+1}\right]=3^{n+2}+\frac{1}{2}\cdot n$$

$$3^n+\frac{1}{2}(n-2)+(-1)^{n+1}\cdot(n+1)+2\cdot 3^n+(-1)^{n+2}(n+2)+2\cdot 3^{n+1}=$$

$$=\boxed{3^{n+2}+\frac{1}{2}n}$$

$$3^n+2\cdot 3^n+2\cdot 3^n\cdot 3^1+(-1)^n(-1)(n+1)+(-1)^n\cdot(-1)^2(n+2)+\frac{1}{2}n-1$$

$$3^n(1+2+6)+(-1)^n(-n-1+n+2)+\frac{1}{2}n-1$$

$$3^n\cdot 9+\underbrace{(-1)^n}_{\underbrace{n\text{ זוגי}}_{+1}}\cdot 1+\frac{1}{2}n-1=\boxed{3^{n+2}+\frac{1}{2}n}$$

מ.ש.ל

5 א

הוכחה ללא אינדוקציה:

$$1+8+15+\dots+\left[(-1)^n\cdot n+2\cdot 3^{n-1}\right]$$

$$(-1)^1\cdot 1+2\cdot 3^0$$
$$(-1)^2\cdot 2+2\cdot 3^1$$
$$(-1)^3\cdot 3+2\cdot 3^2$$
$$(-1)^4\cdot 4+2\cdot 3^3$$
$$\vdots$$
$$(-1)^{n-1}(n-1)+2\cdot 3^{n-2}$$
$$(-1)^n(n)+2\cdot 3^{n-1}$$

אם n זוגי
מתקבלים זוגות
ולכן יש $\frac{n}{2}$ זוגות

$$\left.\begin{matrix}-1\\+2\end{matrix}\right\}1 \qquad \left.\begin{matrix}-3\\+4\end{matrix}\right\}1 \qquad \vdots$$

$\frac{n}{2}$ זוגות

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{n}{2}\cdot 1}$$

$$2\cdot\begin{matrix}3^0\\3^1\\3^2\\3^3\\\vdots\end{matrix}$$

$$=2\left(\underbrace{3^0+3^1+3^2+3^3\dots}_{\frac{n}{2}\text{ זוגות}}\right)$$

$$=2\cdot\left[\frac{(2^0+3^1)\left(9^{\frac{n}{2}}-1\right)}{9-1}\right]$$

$$\frac{2\cdot 4\cdot(3^n-1)}{8}=$$

$$\boxed{3^n-1}$$

+

$$3^n-1+\frac{n}{2}$$

$$3^n+\frac{n-2}{2}=\boxed{3^n+\frac{1}{2}(n-2)}$$

מ.ש.ל.

5 ?

$$\left(2x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{n} = \left(2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^{n}$$

$x>0$

??? $x^{\frac{2}{3}}$

$$n^3 - 12n^2 + 2n - 24 = 0$$

$$n^2(n-12) + 2(n-12) = 0$$

$$(n-12)(n^2+2) = 0$$

$$\boxed{n=12}$$

$$4 - \frac{5k}{6} = \frac{2}{3} \quad / \cdot 6$$

$$24 - 5k = 4$$

$$20 = 5k$$

$$\boxed{k=4}$$

$$C_{12}^{k}\left(2x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-k} \cdot \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^{k} =$$

$$C_{12}^{k} \cdot 2^{12-k} \cdot (-1)^{k} \cdot \left[x^{4-\frac{k}{3}-\frac{k}{2}}\right]$$

$$x^{4-\frac{5k}{6}}$$

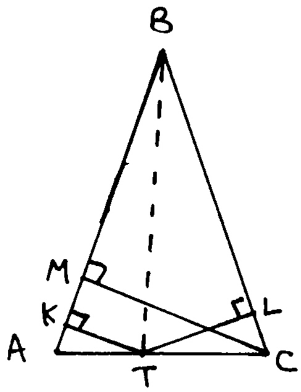
סופי

$$\boxed{C_{12}^{4} \cdot 2^{8}(-1)^{4}} = \frac{12!}{4!\,8!} \cdot 256 =$$

$$\frac{9 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot 11 \cdot \cancel{12}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} \cdot 256 = \boxed{45 \cdot 11 \cdot 256}$$ סופי.

ודז

פתרון שאלה 6 בבחינת מחצית א 5.8.16

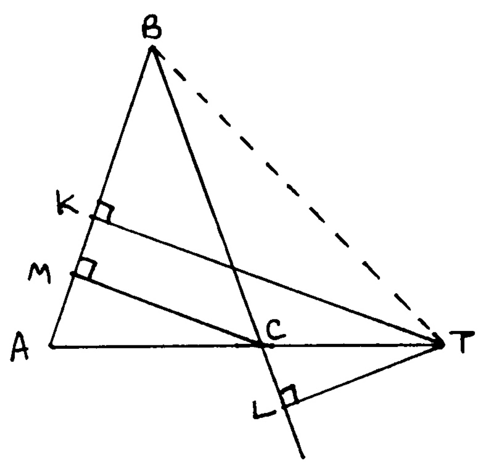


א) $S(\triangle ABC)=S(\triangle ABT)+S(\triangle BCT)$

$$\frac{AB\cdot CM}{\cancel{2}}=\frac{AB\cdot TK}{\cancel{2}}+\frac{BC\cdot TL}{\cancel{2}}$$

AB=BC לפי הנתון. נחלק ב AB:

$CM=TK+TL$ ■

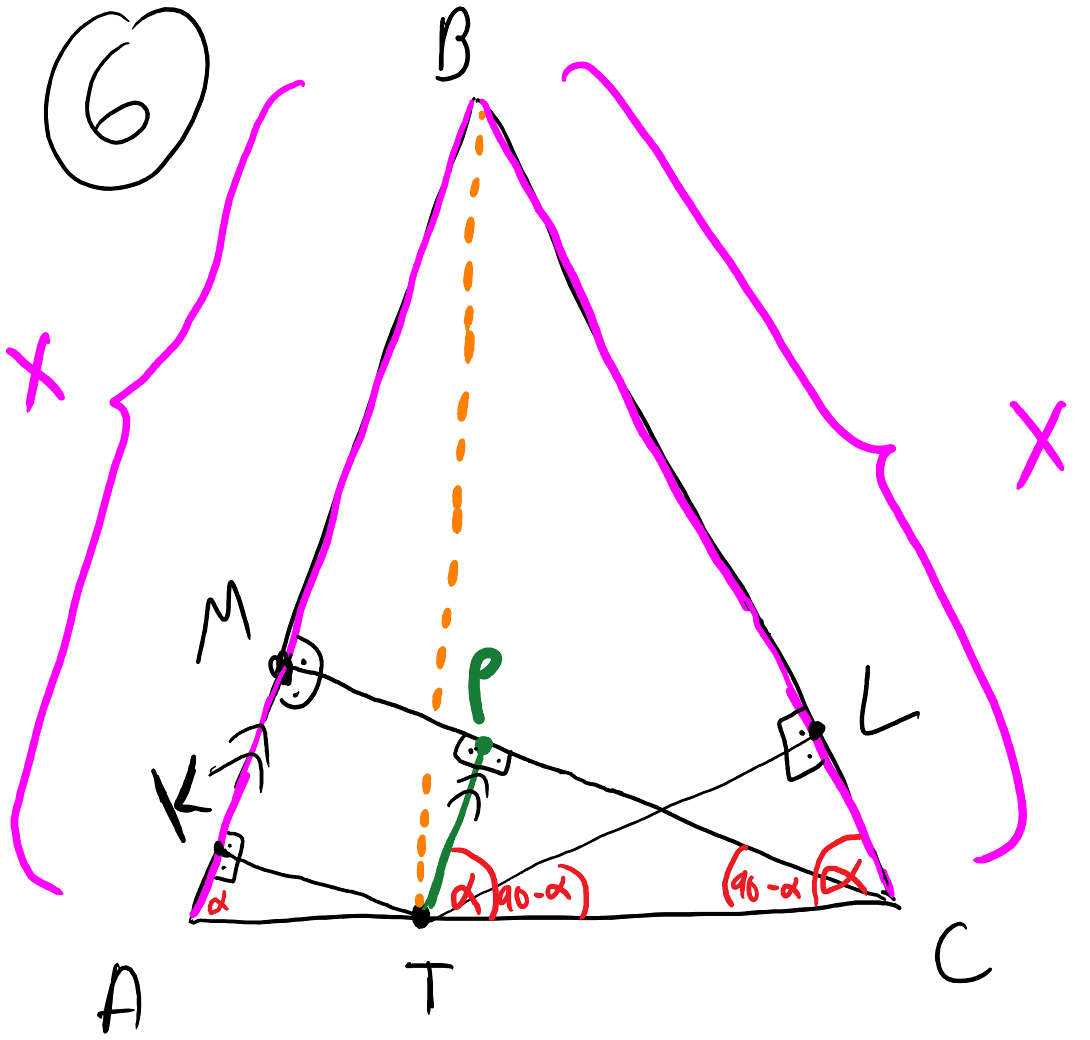


ב) $S(\triangle ABC)=S(\triangle ABT)-S(\triangle BCT)$

$$\frac{AB\cdot CM}{2}=\frac{AB\cdot TK}{2}-\frac{BC\cdot TL}{2}$$

נחלק ב $AB=BC$:

$CM=TK-TL$ ■



בנ': נחבר את הנקודות
A עם T.

דרך אחת בעזרת שטחים

ג

$$S_{ATB}=\frac{TK\cdot AB}{2}=\frac{TK\cdot x}{2}$$

$$S_{CTB}=\frac{TL\cdot BC}{2}=\frac{TL\cdot x}{2}$$

$$S_{ABC}=\frac{CM\cdot BA}{2}=\frac{CM\cdot x}{2}$$

$$S_{ABC}=S_{ATB}+S_{CTB}$$

$$\frac{CM\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}=\frac{TK\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}+\frac{TL\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}$$

$$\boxed{CM=TK+TL}$$

מ.ש.ל

דרך ב' – ע"י העברת ישר מקביל וחפיפת משולשים.

בנ': מן נקודה T נעביר ישר שמקביל לצלע BA, שיחתוך את CM בנקודה P.

$TP \parallel AB \Rightarrow \angle P=90^\circ \Rightarrow MKTP$ מלבן $\Rightarrow \boxed{KT=MP}$

$\angle A=\angle C=\alpha \Rightarrow \angle LTC=\angle PCT=90-\alpha \Rightarrow \angle PTC=\alpha$

$\Rightarrow \triangle PTC \cong \triangle LCT$ (ז.צ.ז)

90-α, TC משותפת, α

$$\Downarrow$$

$$\boxed{PC=LT}$$

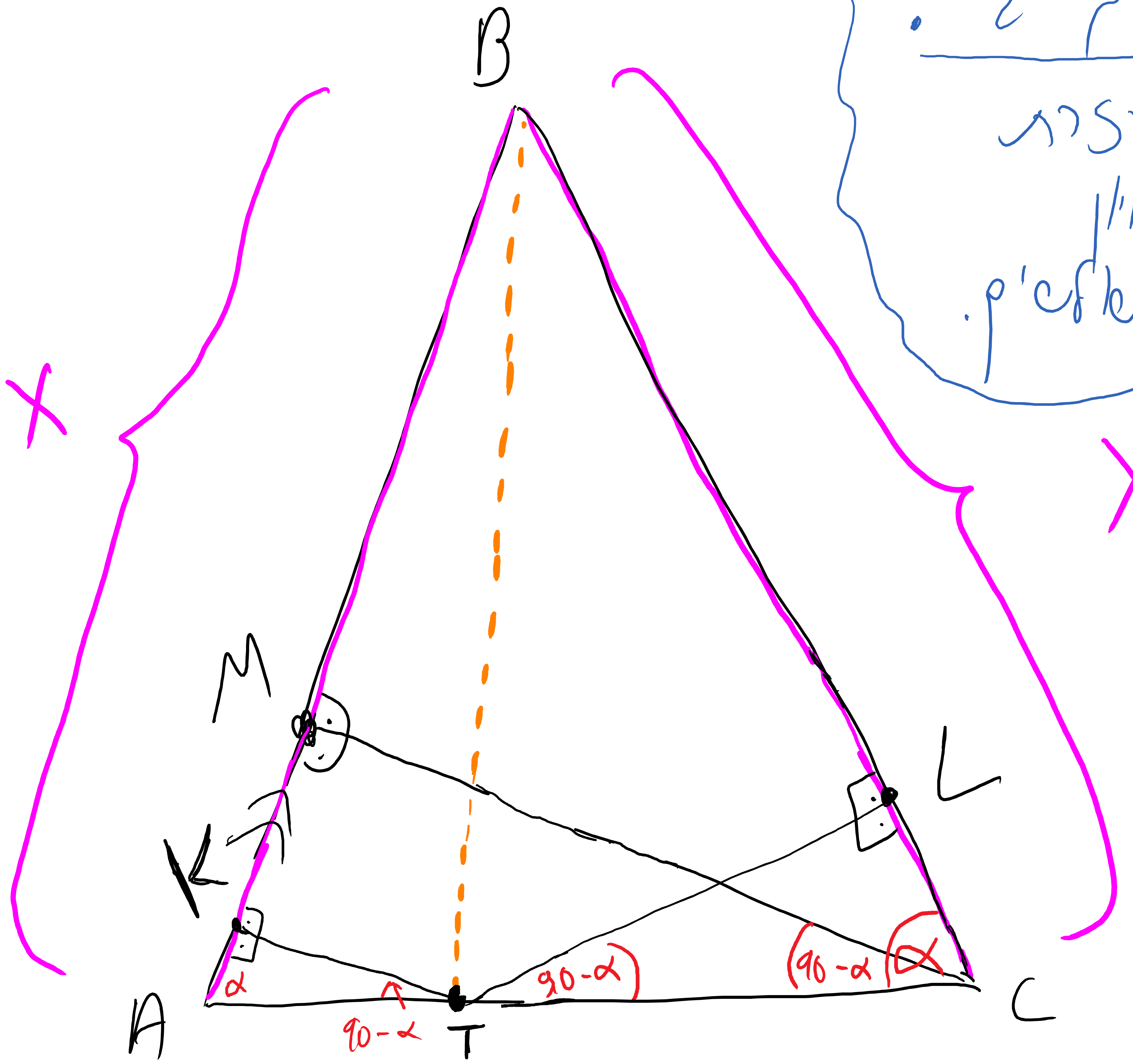
$$\Downarrow$$

$$\boxed{MC=MP+PC=KT+LT}$$

מ.ש.ל

דרך ב:

בעזרת דמיון משולשים.



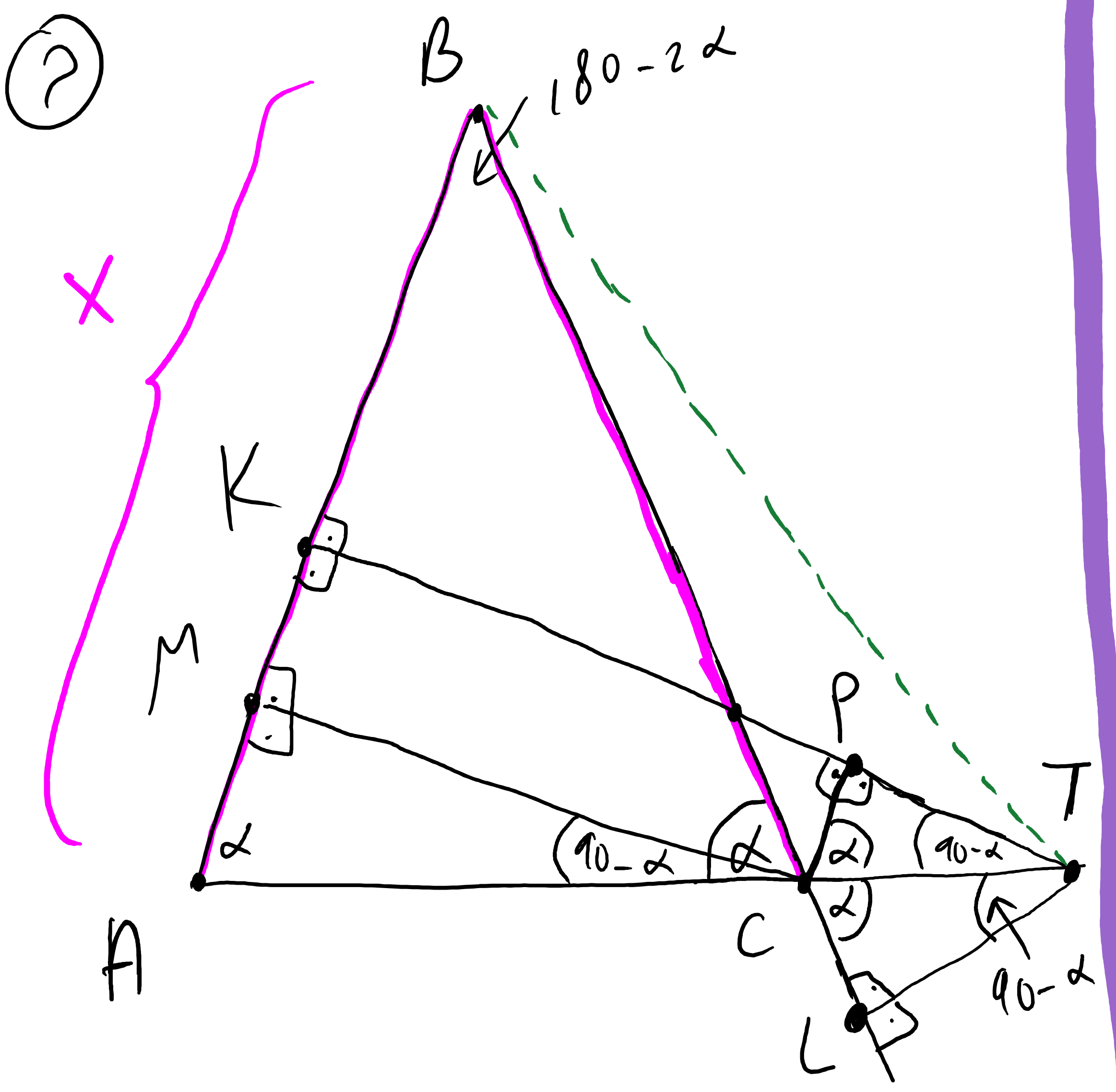
$$\triangle AKT \sim \triangle AMC \;\Downarrow\; \frac{KT}{MC} = \frac{AT}{AC}$$

$$\triangle LCT \sim \triangle MAC \;\Downarrow\; \frac{TL}{MC} = \frac{TC}{AC}$$

$$AT + TC = AC$$

$$\frac{KT + TL}{MC} = \frac{AT + TC}{AC} = \frac{AC}{AC} = 1$$

$$\boxed{KT + TL = MC}$$ מ.ש.ל.



דרך א' בעזרת שטחים:

$$S_{BTA}=\frac{TK\cdot BA}{2}=\frac{TK\cdot x}{2}$$

$$S_{BCA}=\frac{CM\cdot BA}{2}=\frac{CM\cdot x}{2}$$

$$S_{BTC}=\frac{TL\cdot BC}{2}=\frac{TL\cdot x}{2}$$

$$S_{BTA}=S_{BCA}+S_{BTC}$$

$$\frac{TK\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}=\frac{CM\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}+\frac{TL\cdot \cancel{x}}{\cancel{2}}$$

$$TK=CM+TL$$

$$\boxed{TK-TL=CM}$$

דרך ב': נעביר מקביל:

נעביר דרך C מקביל ל AB שיחתוך את TK בנקודה P

$$\Rightarrow CP \parallel MK \Rightarrow \measuredangle P=90^\circ \Rightarrow KPCM \text{ מלבן} \Rightarrow \boxed{KP=MC}$$

$\Delta PTC \cong \Delta LTC$ (ז . צ . ז) $\Rightarrow$ $\boxed{PT=TL}$

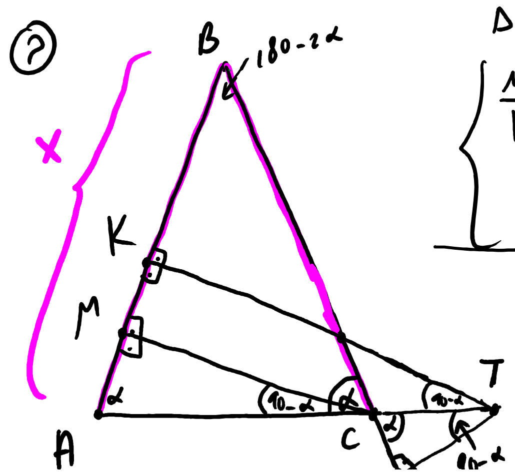
α

CT משותפת

90-α

$$KT=KP+PT=MC+TL \Rightarrow \boxed{KT-TL=MC}$$

דרך ג' - בעזרת דמיון:



$\Delta AMC \sim \Delta AKT$

$\Downarrow$

$$\frac{MC}{KT}=\frac{AC}{AT}$$

$\Delta AKT \sim \Delta CLT$

$\Downarrow$

$$\frac{LT}{KT}=\frac{CT}{AT}$$

$$AC+CT=AT$$

$$\Rightarrow \frac{MC+LT}{KT}=\frac{AC+CT}{AT}=\frac{AT}{AT}=1$$

$\Downarrow$

$$MC+LT=KT \Rightarrow \boxed{KT-LT=MC}$$